SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Maria Manfredini

STIME A PRIORI IN L^p PER UNA CLASSE DI OPERATORI DI TIPO KOLMOGOROV IN FORMA DI NON DIVERGENZA E A COEFFICIENTI DISCONTINUI

14 aprile 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. In questa nota presentiamo alcune stime a-priori L^p per operatori del secondo ordine in forma di non divergenza del tipo seguente

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = f \in L^p(R^{N+1}),$$

$$(x,t) \in R^{N+1},\ 1 \leq q \leq N,\ b_{ij} \in R,\ i,j = 1, \ldots N$$

dove la matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\ldots,q}$ é simmetrica e "uniformemente" definita positiva in R^q. Inoltre, i coefficienti a_{ij} sono limitati e appartengono a uno spazio di funzioni a oscillazione media infinitesima modellato su una struttura di spazio omogeneo associato all'operatore L in modo naturale.

Abstract. In this note we show some *a-priori* L^p estimates for non divergence linear second order equations of the following type:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = f \in L^p(R^{N+1}),$$

$$(x,t) \in R^{N+1},\ 1 \leq q \leq N,\ b_{ij} \in R,\ i,j = 1, \ldots N$$

where the matrix $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\ldots,q}$ is simmetric and "uniformly" positive in R^q. Moreover, the coefficients a_{ij} are bounded and belong to a space of vanishing mean oscillation functions modelled on a structure of homogeneous space naturally associated to L.

Section 6 contains a more detailed summary of this work.

§1. Introduzione.

Consideriamo l'operatore differenziale:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t, \tag{1.1}$$

dove $z = (x,t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$ e $b_{ij} \in R$ per ogni $i, i = 1, \dots, N$. Supponiamo a_{ij} misurabile e limitata per ogni $i, j = 1, \dots, q$ e la matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ simmetrica e definita positiva in R^q per ogni $z \in R^{N+1}$.

Se Ω é un aperto di R^{N+1} e se $p \in]1, \infty[$, indichiamo con $S^p(L,\Omega)$, lo spazio

$$S^p(L,\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ / \ u_{x_i}, u_{x_i x_j}, Yu \in L^p(\Omega), i,j = 1, \dots, q\},$$

dove $Yu = \left(\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t\right) u$. Definiamo

$$||u||^p_{S^p(L,\Omega)} = ||u||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{q} ||u_{x_i}||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{q} ||u_{x_i x_j}||^p_{L^p(\Omega)} + ||Yu||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Diremo che $u \in S^p_{loc}(L,\Omega)$ se $\phi u \in S^p(L,\Omega)$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

In questo seminario forniremo stime a priori in $S^p_{loc}(L,\Omega)$ delle soluzioni dell'equazione $Lu = f$ qualora i coefficienti a_{ij} appartengano a uno spazio di funzioni VMO, (cioé a oscillazione media infinitesima) relativamente ad una struttura omogenea associata in modo naturale all'operatore L.

Precisamente abbiamo provato il seguente risultato:

Se $\Omega \subseteq R^{N+1}$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$ allora esiste una costante $c > 0$ tale che

$$||u||_{S^p(\Omega')} \leq c(||Lu||_{L^p(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)})$$

per ogni $u \in S^p_{loc}(L,\Omega)$.

Il metodo utilizzato si rifá a quello introdotto da Chiarenza-Frasca-Longo [CFL] per gli operatori ellittici e in seguito esteso da Bramanti-Cerutti in [BC] agli operatori paraboloci. Tale procedimento consiste nel fornire dapprima una formula di rappresentazione per le derivate seconde di una soluzione, mediante operatori integrali singolari (e i loro commutatori) che hanno nuclei "dipendenti da un parametro"; successivamente sviluppare tali nuclei in armoniche sferiche e studiare la continuitá $L^p - L^p$ degli operatori che compaiono nello sviluppo in serie.

Questo seminario é cosí organizzato: nella prima parte presenteró il metodo di Chiarenza, Frasca e Longo per un'equazione ellittica; nella seconda forniró gli ingredienti principali per dimostrare le stime a priori interne per le soluzioni di $Lu = f$ dove L é l'operatore in (1.1) e $f \in L^p(R^{N+1})$.

I risultati qui presentati sono frutto di un lavoro in collaborazione con M. Bramanti e C. Cerutti.

§2. Il caso ellittico.

Sia Ω un aperto di R^N. Consideriamo l'equazione ellittica in forma di non divergenza:

$$Lu(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{x_i x_j} u(x) = f(x) \quad \text{q.o. in} \quad \Omega. \tag{2.1}$$

É noto che se i coefficienti a_{ij} sono continui allora si hanno stime a priori in $W^{2,p}(\Omega)$. Chiarenza, Frasca e Longo hanno invece provato stime a priori sotto l'ipotesi piú debole: $a_{ij} \in$ VMO.

Come giá accennato la tecnica da loro utilizzata si fonda sui seguenti punti:

- fornire una formula di rappresentazione per le derivate seconde di una soluzione di (2.1) attraverso integrali singolari e i loro commutatori;
- stimare la norma L^p degli operatori integrali mediante lo sviluppo in armoniche sferiche dei loro nuclei.

Supponiamo che in (2.1):

i) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty \cap$ VMO(R^N) per $i, j = 1, \dots, N$.

ii) Esiste $\mu > 0$ tale che

$$\frac{1}{\mu}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2$$

per ogni $x, \xi \in R^N$. (Qui e nel seguito $|\cdot|$ indica la norma euclidea in R^N).

Ricordo che $u \in$BMO (R^N) se $u \in L^1_{loc}(R^N)$ e

$$||u||_* = \sup_B \fint_B |u(z) - u_B|dz < +\infty \tag{2.2}$$

dove $u_B = \fint_B u(z)dz = \frac{1}{|B|}\int_B u(z)dz$, e il sup é fatto su tutte le palle euclidee di R^N.

Se inoltre

$$\lim_{r\to 0} \eta(r) = \lim_{r\to 0} \sup_{\rho \le r} \fint_{B_\rho} |u(z) - u_{B_\rho}|dz = 0,$$

allora diremo che $u \in$VMO(R^N) .

Fissato $x_0 \in R^N$ indichiamo con L_{x_0} l'operatore congelato in x_0

$$L_{x_0} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\partial_{x_i, x_j}.$$

Allora la soluzione fondamentale di L_{x_0} con polo in zero é la seguente

$$\Gamma^0(y) = \frac{1}{(N-2)\omega_N(detA(x_0))^{1/2}} \left(\sum_{i,j=1}^{N} A^{-1}_{ij}(x_0)y_i y_j\right)^{\frac{2-N}{2}} \tag{2.3}$$

dove $A(x_0) = (a_{ij}(x_0))$ e $A^{-1}(x_0) = (A^{-1}_{ij}(x_0))$.

In seguito denoteremo con $\Gamma(x;\cdot)$ la soluzione fondamentale, con polo in zero, dell'operatore congelato in x.

Osservazione 2.1. $\Gamma^0 \in C^\infty(R^N \setminus \{0\})$, é omogenea di grado $2-N$ e verifica la seguente proprietá: per ogni $m \in N \cup \{0\}$ e per ogni $x \in R^N$ si ha

$$\sup_{|y|=1,|\beta|=2m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta \Gamma_{ij}(x;y) \right| \leq M(m). \tag{2.4}$$

Qui $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ indica un multi-indice intero non negativo di altezza $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_{N+1}$.

Infine vale la cosidetta proprietá di media nulla:

$$\int_{|y|=1} \Gamma_{ij}(x;y) d\sigma_y = 0 \quad \forall x \in R^N,\ i,j = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

Teorema 2.2 (Formula di rappresentazione).
Sia $u \in C_0^\infty(R^N)$. *Allora se* $x \in$ *supp.* u *e* $u_{x_i x_j} = \partial_{x_i x_j} u$ *si ha*

$$u_{x_i x_j}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|\geq\epsilon} \Gamma_{ij}(x; x-y) \left[Lu(y) + \sum_{hk=1}^{q} (a_{hk}(x) - a_{hk}(y)) u_{x_h x_k}(y) \right] dy \tag{2.6}$$
$$+ Lu(x) \int_{|y|=1} \Gamma_i(x;y) \nu_j(y)\, d\sigma_y, \quad i,j = 1, \dots, N.$$

Cenno della dimostrazione. Fissato $x_0 \in R^N$, indichiamo con L_0 l'operatore congelato in x_0 e con Γ^0 la corrispondente soluzione fondamentale. Allora si ha

$$u(x) = \int_{R^N} \Gamma^0(x-y)\, L_0 u(y) dy \qquad x \in \text{supp. } u$$

e si prova che

$$u_{x_i}(x) = \int_{R^N} \Gamma_i^0(x-y)\, L_0 u(y) dy \qquad \text{per } i = 1, \dots, N.$$

Successivamente si dimostra la seguente uguaglianza:

$$u_{x_i x_j}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|\geq\epsilon} \Gamma_{ij}^0(x-y) L_0 u(y) dy + L_0 u(x) \int_{|y|=1} \Gamma_i^0(y) \nu_j(y)\, d\sigma_y.$$

per ogni fissato x_0 e x. Infine scrivendo

$$L_0 u(y) = (L_0 - L)u(y) + Lu(y) = \sum_{hk=1}^{N} (a_{hk}(x_0) - a_{hk}(y)) u_{x_h x_k}(y) + Lu(y)$$

segue la (2.6).

Osservazione 2.3. Nella formula di rappresentazione compaiono integrali singolari del tipo:

$$V.P. \int \Gamma_{ij}(x; x-y)g(y)dy$$

cioé operatori di tipo convoluzione con nuclei che dipendono da un parametro. Osserviamo che per ogni $x \in R^N$ il nucleo $k(\cdot) = \Gamma_{ij}(x; \cdot)$ é di tipo Calderón-Zygmund. (Infatti $k \in C^\infty(R^N \setminus \{0\})$, k é omogeneo di grado $-N$ e verifica la proprietá di media nulla). Allora k definisce un operatore integrale $L^p - L^p$ continuo ([CZ]). Precisamente, posto

$$K_\epsilon g(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} k(x-y)g(y)dy$$

allora K_ϵ converge in L^p per $\epsilon \to 0$, a un operatore K che é $L^p - L^p$ continuo.

Infine un analogo risultato sussiste per il commutatore, cioé se definiamo

$$C_\epsilon[a,g](x) = a(x)K_\epsilon g(x) - K_\epsilon(ag)(x), \quad a \in L^\infty(R^N),$$

allora esiste $C[a,g] \in L^p(R^N)$ tale che per ogni $g \in L^p(R^N)$

$$C_\epsilon[a,g] \to C[a,g] \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \to 0 \quad \text{e} \quad ||C_\epsilon[a,g]||_{L^p} \le c(p)||a||_* \, ||g||_{L^p}.$$

Le armoniche sferiche

Per ogni fissato $x \in R^N$ sviluppiamo il nucleo $\Gamma_{ij}(x; \cdot)$ in armoniche sferiche. Ricordiamo che le armoniche sferiche di grado m in R^N sono i polinomi armonici omogenei di grado m ristretti alla sfera unitaria Σ_N; esse formano uno spazio di dimensione finita g_m.

É possibile costruire un sistema di armoniche sferiche ortonormale e completo in $L^2(\Sigma_N)$ che in seguito indicheremo con

$$\{Y_{km}\} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, \dots, g_m.$$

Allora se $f \in C^\infty(\Sigma_N)$ si puó considerare il suo sviluppo in serie di Fourier rispetto a $\{Y_{km}\}$:

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{g_m} b_{km} Y_{km}(x)$$

dove $b_{km} = \int_{\Sigma_N} f(x) Y_{km}(x) d\sigma_x$ e verifica la seguente disuguaglianza

$$|b_{km}| \le A_r m^{-2r} \sup_{|\zeta|=1, |\beta|=2r} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^\beta f(\zeta) \right|$$

per ogni r naturale, ove A_r é una costante positiva indipendente da k e da m e β un multiindice intero. Inoltre vale la seguente stima:

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} Y_{km}(x) \right\|_{L^{\infty}(\Sigma_N)} \leq c\, m^{\frac{N-2}{2}+|\beta|}.$$

Consideriamo allora l'operatore

$$T_{\epsilon}g(x) = \int_{|x-y|\geq\epsilon} \Gamma_{ij}(x; x-y) g(y) dy,$$

che compare nella formula di rappresentazione. L'idea é quella di sviluppare il nucleo $\Gamma_{ij}(x;\cdot)$ in armoniche sferiche e scrivere T_{ϵ} come somma di una serie di operatori di tipo Calderón-Zygmund.

Precisamente

$$\Gamma_{ij}(x;y) = \frac{1}{|y|^N}\Gamma_{ij}(x;y'), \quad y' = \frac{y}{|y|} \in \Sigma_N,$$

allora

$$\Gamma_{ij}(x;y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b^{ij}_{km}(x)\frac{Y_{km}(y')}{|y|^N}.$$

dove

$$b^{ij}_{km}(x) = \int_{\Sigma_N} \Gamma_{ij}(x;y) Y_{km}(y) d\sigma_y.$$

Osserviamo infine che la proprietá di media nulla (2.5) assicura che $b^{ij}_{1m} = 0$ se $m = 0$.

Allora

$$T_{\epsilon}g(x) = \int_{|x-y|\geq\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b^{ij}_{km}(x)\frac{Y_{km}((x-y)')}{|x-y|^N} g(y) dy,$$

dove

$$\frac{Y_{km}(y')}{|y|^N}$$

é di tipo Calderón-Zygmund.

Si dimostra che la serie converge totalmente in $L^p(R^N)$ e uniformemente rispetto ad ϵ. Per la prova sono risultate cruciali le stime (2.4) di Γ_{ij}.

Sussistono i seguenti teoremi:

Teorema 2.4. *Per ogni $g \in L^p(R^N)$ esiste $Tg \in L^p(R^N)$ tale che*

$$T_{\epsilon}g \to Tg \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \to 0 \quad \text{e} \quad ||Tg||_{L^p} \leq c||g||_{L^p}\ \forall \epsilon > 0.$$

Per i commutatori vale l'analogo teorema

Teorema 2.5. *Se $a \in L^\infty(R^N)$, posto*

$$C_\epsilon[a,g](x) = \int_{|x-y|\geq\epsilon} \Gamma_{ij}(x;x-y)\,(a(x)-a(y))g(y)\,dy$$

allora per ogni $g \in L^p(R^N)$ esiste $C[a,g] \in L^p(R^N)$ tale che

$$C_\epsilon[a,g] \to C[a,g] \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \to 0 \quad \text{e} \quad ||C[a,g]||_{L^p} \leq c||a||_* \, ||g||_{L^p}.$$

Dalla formula di rappresentazione e dai Teoremi 2.4, 2.5 segue

Teorema 2.6 (Stime a priori). *([CFL]) Se $\Omega' \subset\subset \Omega$ allora esiste una costante positiva $c = c(N,p,\mu,M,dist(\Omega',\partial\Omega))$ tale che*

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega')} \leq c(||Lu||_{L^p(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)}), \quad \forall u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega).$$

§3. Equazioni di tipo Kolmogorov: preliminari.

In R^{N+1} consideriamo l'operatore differenziale:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\partial_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t, \quad D = (\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_N}), \tag{3.1}$$

dove $z = (x,t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$ e $\langle\,,\rangle$ indica il prodotto interno in R^N.

Sui coefficienti di L faremo le seguenti ipotesi:

H_1) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^{N+1})$ per $i,j = 1,\dots,q$ ed esiste $\mu > 0$ tale che

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \leq \mu\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2$$

per ogni $z \in R^{N+1}$ e $(\xi_1,\dots,\xi_q) \in R^q$.

H_2) B é una matrice costante $N \times N$ e ha la forma seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove per ogni $i = 1,\dots,r$, B_i é una matrice $p_{i-1} \times p_i$ con rango p_i, $q = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r$ e $p_0 + p_1 + \dots + p_r = N$.

Ad esempio se in R^{2n+1} consideriamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora

$$L=\sum_{i=1}^{n}\partial^2_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\partial_{x_{n+i}}-\partial_t,$$

é un prototipo dell'operatore di Kolmogorov, verifica H_1 e H_2 con $q=p_0=p_1=n$ ed $r=1$.

Fissato $z_0\in R^{N+1}$, indichiamo con L_{z_0} l'operatore congelato in z_0

$$L_{z_0}=\sum_{i,j=1}^{q}a_{ij}(z_0)\partial_{x_i,x_j}+\langle x,BD\rangle-\partial_t.$$

Osservazione 3.1. (Invarianza di L_{z_0} per traslazioni).
Se si pone

$$(x,t)\circ(y,\tau)=(y+E(\tau)x,t+\tau)\quad\text{per ogni }(x,t),(y,\tau)\in R^{N+1}$$

dove

$$E(\tau)=\exp(-\tau B^T),$$

allora $(R^{N+1},\circ)$ é un gruppo (non commmutativo) il cui elemento neutro é $(0,0)$; l'inverso di un elemento $(x,t)\in R^{N+1}$ é $(x,t)^{-1}=(-E(-t)x,-t)$. É facile riconoscere che per ogni $z_0\in R^{N+1}$ l'operatore L_{z_0} é invariante per traslazioni a sinistra del gruppo $(R^{N+1},\circ)$.

Osservazione 3.2. (Invarianza di L_{z_0} per dilatazioni).
Esiste un gruppo di dilatazioni su R^{N+1}, che indicheremo con $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ rispetto al quale L_{z_0} é omogeneo di grado 2, nel senso seguente:

$$L_{z_0}\circ D(\lambda)=\lambda^2D(\lambda)\circ L_{z_0}.$$

La dilatazione $D(\lambda)$ é del tipo seguente

$$D(\lambda):R^{N+1}\to R^{N+1},\quad D(\lambda)(x,t)=(\lambda^{\alpha_1}x_1,\dots,\lambda^{\alpha_N}x_N,\lambda^{\alpha_{N+1}}t)$$

dove $\alpha_1=\cdots=\alpha_{p_0}=1$, $\alpha_{p_0+1}=\cdots=\alpha_{p_0+p_1}=3,\dots,\alpha_{p_0+\cdots+p_{r-1}+1}=\cdots=\alpha_N=2r+1$ e $\alpha_{N+1}=2$, (Cfr. [LP]). Possiamo quindi scrivere

$$D(\lambda)=\text{diag}(\lambda I_{p_0},\lambda^3I_{p_1},\lambda^5I_{p_2},\dots,\lambda^{2r+1}I_{p_r},\lambda^2)$$

dove I_k é la matrice identitá $k\times k$. Indichiamo con $Q+2$ la *dimensione omogenea* di R^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$

$$Q+2=p_0+3p_1+5p_2+\cdots(2r+1)p_r+2.$$

Osserviamo che $Q+2$ é definito implicitamente anche dall'identitá $detD(\lambda)=\lambda^{Q+2}$. Nel seguito chiameremo Q la *dimensione omogenea spaziale* e denoteremo con $D_0(\lambda)$ la restrizione di $D(\lambda)$ ad R^N.

Introduciamo ora una "norma" in R^{N+1} omogenea di grado 1 rispetto al gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ (Cfr. [FR]).

Definizione 3.3. *Se $z \in R^{N+1} \setminus \{0\}$ poniamo $||z|| = \rho$ se ρ é l'unica soluzione positiva dell'equazione*

$$\frac{x_1^2}{\rho^{2\alpha_1}} + \frac{x_2^2}{\rho^{2\alpha_2}} + \cdots + \frac{x_N^2}{\rho^{2\alpha_N}} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1.$$

Allora

Proposizione 3.4. *L'applicazione $z \mapsto ||z||$ ha le seguenti proprietá*

N_1) $||D(\lambda)z|| = \lambda ||z||$ per ogni $z \in R^{N+1}$ e per ogni $\lambda > 0$.

N_2) L'insieme $\{z/||z|| = 1\}$ é la sfera euclidea $\Sigma_{N+1} = \{(x,t)/|x|^2 + t^2 = 1\}$.

N_3) Esiste una costante $c \geq 1$ tale che per ogni $z, \zeta \in R^{N+1}$ si ha

$$||z + \zeta|| \leq c(||z|| + ||\zeta||) \quad e \quad ||z \circ \zeta|| \leq c(||z|| + ||\zeta||)$$

e

$$\frac{1}{c}||z|| \leq ||z^{-1}|| \leq c||z||.$$

N_4) Esiste $\beta = \beta(r) \in]0,1]$ tale che per ogni compatto K di R^{N+1} esiste $c > 0$ tale che

$$|z - \zeta| \leq c||\zeta^{-1} \circ z||^{\beta}, \quad z, \zeta \in K,$$

dove $|\ |$ indica la norma euclidea in R^{N+1}.

Introduciamo ora una "distanza" in R^{N+1} modellata sulla norma $||\ ||$:

Definizione 3.5. *Per ogni $z, \zeta \in R^{N+1}$ poniamo*

$$d(z,\zeta) = ||\zeta^{-1} \circ z|| + ||z^{-1} \circ \zeta||.$$

Da N_3 si evince che d é una quasidistanza nel senso che

$$d(z,\zeta) \geq 0, \quad d(z,\zeta) = 0 \quad \text{se e solo se } z = \zeta,$$

ed esiste $c > 0$ tale che

$$d(z,\zeta) \leq c\,(d(z,z') + d(z',\zeta))$$

per ogni $z, z', \zeta \in R^{N+1}$.

Denoteremo con $B(z,r)$ oppure con $B_r(z)$ l'insieme

$$B(z,r) = \{\zeta \in R^{N+1}\,/\,d(z,\zeta) \leq r\}. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.6. La misura di Lebesgue é invariante per le traslazioni del gruppo $(R^{N+1}, \circ)$. Infatti se F é un sottoinsieme di R^{N+1} per ogni $\zeta = (\xi, \tau) \in R^{N+1}$ si ha

$$|F| = \int_F dz = (\text{posto } z' = \zeta \circ z) = \int_{\zeta \circ F} dz'$$

in quanto $dz = dz'$ essendo $z' = (x + E(t)\xi, t + \tau')$.

Analogamente

$$|F| = \int_F dz = (\text{posto } z' = z \circ \zeta) = \int_{F\circ\zeta} dz'$$

in quanto $dz = dz'$ essendo $z' = (\xi + E(\tau)x, t + \tau')$ e $|detE(\tau)| = 1$. Quest'ultima identitá si ottiene dalla seguente:

$$E(\lambda^2 t) = D_0(\lambda)E(t)D_0(\frac{1}{\lambda}) \quad \text{per ogni } \lambda > 0$$

(cfr. [LP]). Da questa infatti si trova $det(E(\lambda^2\tau)) = detE(\tau)$ per ogni $\lambda > 0$. Per $\lambda \to 0$ si ha $1 = |detE(0)| = |detE(\tau)|$ per ogni $\tau \in R$.

Osservazione 3.7. $|B(z,r)| = |B(0,r)| = |B(0,1)|r^{Q+2}$, per ogni $z \in R^{N+1}$ e per ogni $r > 0$. Questo segue dalla invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, dalla $D(\lambda)$-omogeneitá di grado 1 di $||\cdot||$ e dalla definizione di dimensione omogenea di R^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$:

$$|B(0,r)| = \int_{||\zeta||+||\zeta^{-1}||\leq r} d\zeta = \int_{||D(\frac{1}{r})\zeta||+||D(\frac{1}{r})\zeta^{-1}||\leq 1} d\zeta.$$

Poiché $||D(\frac{1}{r})\zeta^{-1}|| = ||(D(\frac{1}{r})\zeta)^{-1}||$ e $d(D(\frac{1}{r})\zeta) = r^{-Q-2}d\zeta$ si ha

$$|B(0,r)| = r^{Q+2}\int_{||\zeta||+||\zeta^{-1}||\leq 1} d\zeta = r^{Q+2}|B(0,1)|.$$

In particolare, (R^{N+1}, dz, d) é uno spazio di natura omogenea nel senso di Coifman e Weiss ([CW]) in quanto

$$|B(z,2r)| = 2^{Q+2}|B(z,r)| \quad \forall z \in R^{N+1}, \quad \forall r > 0.$$

§4. Operatore a coefficienti congelati e formula di rappresentazione per le derivate seconde.

Fissiamo $z_0 \in R^{N+1}$ e indichiamo con L_{z_0} l'operatore congelato in z_0

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z_0)\partial_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t.$$

Le condizioni H_1 e H_2 assicurano che l'algebra di Lie generata da $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_q}, Y$ ha rango $N+1$ in ogni punto di R^{N+1} e che, per ogni fissato $z_0 \in R^{N+1}$, l'operatore L_{z_0} é ipoellittico, (cfr. [LP]).

La soluzione fondamentale di L_{z_0} con polo in zero é la seguente

$$\Gamma^0(x,t) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}(detC(t,z_0))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t,z_0)x, x\rangle\right)$$

se $t > 0$, $\Gamma^0(x,t) = 0$ se $t \leq 0$.

La soluzione fondamentale con polo in (y,τ) é la traslata di Γ^0 rispetto al gruppo $(R^{N+1}, \circ)$:

$$\Gamma^0(x,t;y,\tau) = \Gamma^0((y,\tau)^{-1} \circ (x,t);(0,0)) = \Gamma^0((y,\tau)^{-1} \circ (x,t)).$$

$C(t,z_0)$ é la matrice

$$C(t,z_0) = \int_0^t E(s)A(z_0)E^T(s)ds$$

essendo $A(z_0)$ matrice costante $N \times N$

$$A(z_0) = \begin{pmatrix} A_0(z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $A_0(z_0)$ la matrice $q \times q$ simmetrica e definita positiva in R^q: $A_0(z_0) = (a_{ij}(z_0))_{i,j=1,\dots,q}$.

Utilizzando le dilatazioni $D(\lambda)$, la soluzione fondamentale Γ^0, per $t > 0$, si puó scrivere nel seguente modo:

$$(4.1) \qquad \Gamma^0(x,t) = \frac{t^{-\frac{Q}{2}}}{(4\pi)^{N/2}(detC(1,z_0))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(1,z_0)D_0(\frac{1}{\sqrt{t}})x, D_0(\frac{1}{\sqrt{t}})x\rangle\right),$$

(Cfr. [LP]).

In seguito denoteremo con $\Gamma(z;\cdot)$ la soluzione fondamentale, con polo in zero, dell'operatore congelato in z.

Proposizione 4.1 (Proprietá di Γ). *Sia $z_0 \in R^{N+1}$ e $\Gamma^0(\cdot) = \Gamma(z_0;\cdot)$. Allora*

G_1) *$\Gamma^0 \in C^\infty(R^{N+1} \setminus \{0\})$.*

G_2) *Γ^0 é $D(\lambda)$-omogenea di grado $-Q$. Inoltre $\Gamma^0_i = \partial_{x_i}\Gamma^0$ e $\Gamma^0_{ij} = \partial_{x_i x_j}\Gamma^0$ sono $D(\lambda)$-omogenee di grado rispettivamente $-Q-\alpha_i$ e $-Q-\alpha_i-\alpha_j$ per ogni $i,j = 1,\dots,N+1$. In particolare Γ^0_{ij} é omogenea di grado $-Q-2$ per $i,j = 1,\dots,q$.*

G_3) *Posto $c = \max\{\sup_{\Sigma_{N+1}} |\Gamma^0_i(z)|, \sup_{\Sigma_{N+1}} |\Gamma^0_{ij}(z)|\}, i,j = 1,\dots,N$ risulta*

$$|\Gamma^0_i(z)| \leq \frac{c}{||z||^{Q+\alpha_i}} \quad \text{e} \quad |\Gamma^0_{ij}(z)| \leq \frac{c}{||z||^{Q+\alpha_i+\alpha_j}}, \ \forall z \in R^{N+1} \setminus \{0\}.$$

G_4) *Per ogni $m \in N \cup \{0\}$ e per ogni $z \in R^{N+1}$ si ha*

$$\sup_{||\zeta||=1, |\beta|=2m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^\beta \Gamma_{ij}(z;\zeta) \right| \leq c(r,m).$$

Qui $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_N,\beta_{N+1})$ indica un multi-indice intero non negativo di altezza $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_N + \beta_{N+1}$.

Teorema 4.2 (Proprietá di media nulla di Γ^0_{ij}).
Per ogni a, b con $0 < a < b$ si ha

$$\int_{a\leq||z||\leq b} \Gamma^0_{ij}(\zeta)d\zeta = 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,q. \tag{4.2}$$

Γ^0_{ij} é quindi un nucleo che definisce una distribuzione di tipo zero secondo Rothschild e Stein, [RS].

Teorema 4.3 (Formula di rappresentazione per le derivate seconde).
Sia $u \in C_0^\infty(R^{N+1})$. Allora se $z \in$ supp. u e $u_{x_ix_j} = \partial_{x_ix_j}u$ si ha

$$u_{x_ix_j}(z) =$$

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{||\zeta^{-1}\circ z||\geq\sqrt{\epsilon}} \Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)\left[Lu(\zeta) + \sum_{hk=1}^{q}(a_{hk}(z) - a_{hk}(\zeta))u_{x_hx_k}(\zeta)\right]d\zeta \tag{4.3}$$
$$- Lu(z)\int_{||\zeta||=1}\Gamma_i(z;\zeta)\nu_j(\zeta)\,d\sigma_\zeta, \quad i,j = 1,\dots,q.$$

§5. Stime interne a priori.

Consideriamo l'operatore

$$T_\epsilon g(z) = \int_{||\zeta^{-1}\circ z||\geq\sqrt{\epsilon}} \Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)g(\zeta)d\zeta,$$

che compare nella formula di rappresentazione (4.3).

Vale il seguente teorema:

Teorema 5.1. *Per ogni $g \in L^p(R^{N+1})$ esiste $Tg \in L^p(R^{N+1})$ tale che*

$$T_\epsilon g \to Tg \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \to 0 \quad e \quad ||Tg||_{L^p} \leq c\,||g||_{L^p}\ \forall g \in L^p.$$

Come nel caso ellittico si puó sviluppare il nucleo $\Gamma_{ij}(z;\cdot)$ in armoniche sferiche, e scrivere T_ϵ come somma di una serie di operatori di tipo "convoluzione con nuclei costanti".

Precisamente, per l'omogeneitá si ha

$$\Gamma_{ij}(z;\zeta) = \frac{1}{||\zeta||^{Q+2}}\Gamma_{ij}(z;\zeta')$$

dove $\zeta' = D(\frac{1}{||\zeta||})\zeta \in \Sigma_{N+1}$. Allora se $b^{ij}_{km}(z) = \int_{\Sigma_{N+1}}\Gamma_{ij}(z;\zeta)J(\zeta)Y_{km}(\zeta)d\sigma_\zeta$ si ha

$$\Gamma_{ij}(z;\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b^{ij}_{km}(z)\frac{Y_{km}(\zeta')}{||\zeta||^{Q+2}} \quad \forall z,\zeta \in R^{N+1}.$$

Perció possiamo scrivere

$$T_\epsilon g(z) = \int_{||\zeta^{-1}\circ z||\geq\sqrt{\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b^{ij}_{km}(z)\frac{Y_{km}((\zeta^{-1}\circ z)')}{||\zeta^{-1}\circ z||^{Q+2}}g(\zeta)d\zeta.$$

Uno dei punti cruciali nella prova del Teorema 5.1 é la dimostrazione della continuitá $L^p - L^p$ dell'operatore integrale singolare con nucleo

$$h_{km}(\zeta) = \frac{Y_{km}(\zeta')}{||\zeta||^{Q+2}}.$$

Osserviamo che h_{km} é omogeneo di grado $-Q-2$ e verifica la proprietá di media nulla. Si puó inoltre dimostrare che h_{km} soddisfa la seguenta condizione di Hörmander puntuale: esistono $\beta \in]0,1]$ e $c > 0$ tali che

$$|h_{km}(\eta^{-1} \circ \zeta) - h_{km}(\eta^{-1} \circ z)| + |h_{km}(\zeta^{-1} \circ \eta) - h_{km}(z^{-1} \circ \eta)| \\ \leq c \frac{||\zeta^{-1} \circ z|| + ||z^{-1} \circ \zeta||^{\beta} ||z^{-1} \circ \eta||^{1-\beta}}{||z^{-1} \circ \eta||^{Q+3}}$$

se $||z^{-1} \circ \eta|| \geq M \, ||\zeta^{-1} \circ z||$, M sufficientemente grande e $c = c(N,r)m^{(N+1)/2}$.

Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 5.2. *Per ogni* $m = 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, g_m$ *e per ogni* $p \in]1, \infty[$ *l'operatore*

$$H^{\epsilon}_{km} g(z) = \int_{||\zeta^{-1} \circ z|| \geq \sqrt{\epsilon}} h_{km}(\zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta,$$

é continuo in L^p; $\lim_{\epsilon \to 0} H^{\epsilon}_{km} = H_{km}$ *e* $H_{km} : L^p \to L^p$ *é lineare e continuo. Infine per ogni* $\epsilon > 0$

$$||H^{\epsilon}_{km} g||_{L^p(R^{N+1})} \leq c_{km} \, ||f||_{L^p(R^{N+1})}$$

e $c_{km} = c(N,r,p)m^{(N+1)/2}$.

Per provare la continuitá $L^2 - L^2$ dell'operatore H^{ϵ}_{km} abbiamo utilizzato un teorema di Cotlar per operatori su uno spazio di Hilbert ([C]); per la continuitá $L^p - L^p$ con $1 < p < 2$ abbiamo applicato i teoremi di Coifman-Weiss per spazi di natura omogenea ([CW]); per $p > 2$ abbiamo proceduto per dualitá.

Infine per quanto riguarda lo studio del commutatore

$$\sum_{h,k=1}^{q} C^{\epsilon}[a_{hk}, u_{x_h x_k}](z) = \\ \sum_{h,k=1}^{q} \int_{||\zeta^{-1} \circ z|| \geq \sqrt{\epsilon}} \Gamma_{ij}(z; \zeta^{-1} \circ z) (a_{hk}(z) - a_{hk}(\zeta)) u_{x_h x_k}(\zeta) \, d\zeta. \tag{5.1}$$

la tecnica da noi seguita consiste ancora nello sviluppare in armoniche sferiche e scrivere il commutatore come somma di una serie di commutatori con nuclei "costanti" che sono $L^p - L^p$ continui con norme che dipendono dai coefficienti a_{hk}. Per questo dobbiamo introdurre una ulteriore ipotesi sui coefficienti di L.

Indicheremo con BMO_L e con VMO_L rispettivamente gli spazi di funzioni ad oscillazione media limitata e ad oscillazione media infinitesima, relativamente alla struttura omogenea associata all'operatore L e introdotta nel paragrafo 3.

Definizione 5.3. *Diremo che $u \in BMO_L$ rispetto alla metrica d se $u \in L^1_{loc}(R^{N+1})$ e*

$$||u||_* = \sup_B \fint_B |u(z) - u_B|dz < +\infty$$

dove $u_B = \fint_B u(z)dz = \frac{1}{|B|}\int_B u(z)dz$, e il sup é fatto su tutti gli insiemi B definiti in (3.2).

Se inoltre

$$\lim_{r\to 0} \eta(r) = \lim_{r\to 0} \sup_{\rho \le r} \fint_{B_\rho} |u(z) - u_{B_\rho}|dz = 0,$$

allora diremo che $u \in VMO_L$.

Per i commutatori in (5.1) si ha un risultato analogo al Teorema 5.1.

Teorema 5.4. *Se $a \in L^\infty(R^{N+1})$ e*

$$C_\epsilon[a,g](z) = \int_{||\zeta^{-1} \circ z|| \ge \sqrt{\epsilon}} \Gamma(z; \zeta^{-1} \circ z)(a(z) - a(\zeta))g(\zeta)\, d\zeta$$

allora esiste $C[a,g] \in L^p(R^{N+1})$ tale che per ogni $g \in L^p(R^{N+1})$

$$C_\epsilon[a,g] \to C[a,g] \quad \text{in } L^p \text{ per } \epsilon \to 0 \quad \text{e} \quad ||C[a,g]||_{L^p} \le c\,||a||_*\,||g||_{L^p},$$

ove c é una costante indipendente da g.

Ora, se i coefficienti a_{ij} dell'operatore L verificano la seguente ulteriore l'ipotesi

H_3) $a_{ij} \in \mathrm{VMO}_L$ per ogni $i, j = 1, \dots, q$,

dalla formula di rappresentazione (4.3) e dai Teoremi 5.1 e 5.4 si ottiene in modo standard la dimostrazione delle seguenti stime a priori interne in L^p delle soluzioni dell'equazione $Lu = f$.

Teorema 5.5 (Stime a priori in $S^p_{loc}(L,\Omega)$). *Esistono $c > 0$ e $r_0 > 0$ tali che se $B_{r_0} \subset\subset \Omega$ allora*

$$||u||_{S^p(B_{r/2})} \le c(||Lu||_{L^p(B_r)} + ||u||_{L^p(B_r)}),$$

per ogni $r \le r_0$ e per ogni $u \in S^p_{loc}(L,\Omega)$.

La prova di questo teorema si basa, oltre che sui risultati precedenti, sui seguenti lemmi:

Lemma 5.6. *Se $a \in VMO_L \cap L^\infty(R^{N+1})$ allora per ogni $\epsilon > 0$ esistono $c > 0$ e $r_0 > 0$ tali che $B_{r_0} \subset\subset \Omega$ e*

$$||C[a,f]||_{L^p(B_r)} \le c\,\epsilon\,||f||_{L^p(B_r)},$$

per ogni $r \le r_0$ e per ogni $f \in L^p(B_r)$.

Lemma 5.7. *Esistono $c > 0$ e $r_0 > 0$ tali che se $B_{r_0} \subset\subset \Omega$ si ha*

$$\sum_{i,j=1}^{q} ||u_{x_i x_j}||_{L^p(B_r)} + ||Yu||_{L^p(B_r)} \leq c\,||Lu||_{L^p(B_r)},$$

per ogni $r \leq r_0$ e per ogni $u \in S^p_{loc}(L, \Omega)$

Concludiamo l'esposizione mostrando soltanto la breve

Dimostrazione del Lemma 5.7. Sia r_0 come nel Lemma 5.6. Dalla formula di rappresentazione (4.3) e dai Teoremi 5.1, 5.4 e dall'ipotesi H_3 segue la disuguaglianza

$$||u_{x_i x_j}||_{L^p(B_r)} \leq c\left(\epsilon \sup_{h,l} ||u_{x_h x_l}||_{L^p(B_r)} + ||Lu||_{L^p(B_r)}\right),$$

per ϵ sufficiente piccolo e con una costante c indipendente da u e da ϵ. Allora scegliendo $\epsilon > 0$ tale che $c\,\epsilon \leq 1/2$, dalla precedente stima si ricava

$$||u_{x_i x_j}||_{L^p(B_r)} \leq c\,||Lu||_{L^p(B_r)}.$$

Infine, poiché $Yu = Lu - \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}\, u_{x_i x_j}$,

$$||Yu||_{L^p(B_r)} \leq c\,||Lu||_{L^p(B_r)}.$$

§6. Summary.

We consider in R^{N+1} the following class of operators:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\partial_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t, \quad D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}),$$

where $z = (x,t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$, B is a constant $N \times N$ matrix and $\langle\, ,\, \rangle$ denotes the inner product in R^N.

We suppose that:

H_1) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^{N+1})$ for $i,j = 1, \dots, q$ and $A(z) = (a_{ji}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ is a $q \times q$ matrix such that for every $z \in R^{N+1}$

$$\frac{1}{\mu} I_q \leq A(z) \leq \mu I_q,$$

($\mu > 0$ and I_q denotes the $q \times q$ identity matrix).

H_2) B is a constant matrix of the type:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

where for every $i = 1, \dots, r$, B_i is a $p_{i-1} \times p_i$ matrix with maximum rank p_i and $q = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r$.

As remarked in 3.1 and 3.2 we can define a group $(R^{N+1}, \circ)$ and a family of dilatations $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ on R^{N+1} such that for every $z_0 \in R^{N+1}$ the freezed operator

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z_0)\partial_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t,$$

is invariant respect to the left translations relative to $\circ$. On the other hand, L_{z_0} commutes with the dilatations $(D(\lambda))$ in the following sense $L_{z_0} \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L_{z_0}$.

Moreover, we can introduce a homogeneous space (in the sense of Coifman and Weiss) (R^{N+1}, d, dx), where d is a $D(\lambda)$- homogeneous distance and dx is a Lebesgue measure, and we can construct the relative spaces of bounded mean oscillation and vanishing mean oscillation functions, BMO_L and VMO_L respectively, (see Definizione 5.3).

We'll suppose that

H$_3$) $a_{ij} \in \mathrm{VMO}_L(R^{N+1})$ for $i, j = 1, \dots, q$.

For every open $\Omega \subset R^{N+1}$ and $p \in]1, \infty[$, we denotes by $S^p(L, \Omega)$, the space

$$S^p(L,\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \;/\; u_{x_i}, u_{x_i x_j}, Yu \in L^p(\Omega), i,j = 1, \dots, q\},$$

where $Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t$, and

$$||u||^p_{S^p(L,\Omega)} = ||u||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{q} ||u_{x_i}||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{q} ||u_{x_i x_j}||^p_{L^p(\Omega)} + ||Yu||^p_{L^p(\Omega)}.$$

We prove *a-priori* estimates in $S^p_{loc}(L, \Omega)$ for solutions of $Lu = f$, $f \in L^p(R^{N+1})$. More precisely:

If $\Omega' \subset\subset \Omega$ then there exists a positive constant c such that

$$||u||_{S^p(\Omega')} \leq c(||Lu||_{L^p(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)})$$

for every $u \in S^p_{loc}(L, \Omega)$.
(see Teorema 5.5).

For this goal, the first step is to derive explicit representation formula for the derivates of a solution of $Lu = f$, (see Teorema 4.3). The second step is to prove L^p estimates for the singular integrals operators (of "convolution" type, respect to the $\circ$ translations, and with variable kernels), involved in the representation formula, via exspansion in spherical harmonics, (see section 5).

This technique is due to Calderón-Zygmund and it is developped by Chiarenza-Frasca-Longo [CFL] in elliptic case (see also section 2).

BIBLIOGRAFIA

[BC] M. Bramanti, M.C. Cerutti, *Commutators of singular integrals and parabolic equations with VMO coefficients*, preprint..

[B] N. Burger, *Espace des fonctions á variation moyenne bornée sur un espace de nature homogéne*, C. R. Acad. Sc. Paris **286** (1978), 139-142.

[CZ] A.P. Calderón, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85-139.

[CFL] F. Chiarenza, M. Frasca, P. Longo, *Interior $W^{2,p}$ estimates for non divergence elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ric. Mat. **XL** (1991), 149-168.

[CW] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag **242**.

[C] M. Cotlar, *A combinatorial inequality and it applications in L^2 spaces*, Rev. Math. Cuyana **1** (1955), 45-55.

[FR] E.B. Fabes, N.M. Riviére, *Singular integrals with mixed homogeneity*, Studia Math. **27** (1966), 19-38.

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino **51.4** (1993), 137-171.

[RS] L. Rothschild, E. Stein, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976), 247-320.